3.2 1ο φυλλάδιο ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ***ΛΥΣΕΙΣ*** *(version 3-11-16)*

■ $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ ■ $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\dfrac{1}{\sigma\varphi\omega}$ ■ $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

$\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega$ ■ $\eta\mu^2\omega=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α2 *(σ. 63)* Αν $\sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{2}{3}$ και $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση:

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x$ έχουμε

$\eta\mu^2 x=1-.....$

Επειδή $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$ (........... τεταρτημόριο) θα είναι ημx..........., οπότε έχουμε

$\eta\mu x=................$

Τώρα, από την ταυτότητα $\varepsilon\varphi x=........$ έχουμε :

$\varepsilon\varphi x=.........$ και

$\sigma\varphi x=\dfrac{1}{......}=$

Α4 *(σ. 63)* Αν $\sigma\varphi x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ και $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

<u>Απάντηση</u> : $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{2}{3}$, $\eta\mu x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Λύση:

1ος τρόπος (Σχολικό)

- $\varepsilon\varphi x=\dfrac{1}{\sigma\varphi x}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- Είναι $\sigma\varphi x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\eta\mu x$ **(1)**

Επειδή $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$, λόγω της (1) έχουμε:

$$\eta\mu^2 x+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\eta\mu x\right)^2=1\Leftrightarrow \eta\mu^2 x+\frac{4\cdot 5}{25}\eta\mu^2 x=1\Leftrightarrow \eta\mu^2 x+\frac{4}{5}\eta\mu^2 x=1\Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x+4\eta\mu^2 x=5$$

$9\eta\mu^2\omega=5\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega=\frac{5}{9}\Leftrightarrow \eta\mu\omega=\sqrt{\frac{5}{9}}\Leftrightarrow \eta\mu\omega=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (Αφού για $0<x<\frac{\pi}{2}$ ισχύει ημx>0)

Από την **(1)** παίρνουμε**:** $\sigma\upsilon\nu x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{3}$

2^{ος} τρόπος (mine)

- $\varepsilon\phi x=\frac{1}{\sigma\varphi x}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

- Εχουμε δείξει ότι $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{5}{4}}=\frac{1}{\frac{4}{4}+\frac{5}{4}}=\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}$

Αρα επειδή $0<x<\frac{\pi}{2}$ θα είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ οπότε $:\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

- $\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

Αφού $0<x<\frac{\pi}{2}$ θα είναι $\eta\mu x>0$ οπότε $\eta\mu x=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

- Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πούμε:

$$\varepsilon\phi x=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\sqrt{5}}{2}\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

ΤΡΟΠΟΙ (Μέθοδοι) ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

1ος τρόπος: Ξεκινάμε από το ένα μέλος (αυτό που έχει περισσότερες πράξεις) και φτάνουμε στο άλλο.

2ος τρόπος: Προχωράμε με ισοδυναμίες και καταλήγουμε (φθάνουμε) σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που φανερά είναι αληθής.Ετσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισοδύναμος ισχυρισμός είναι αληθής.

Α12. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$$

Λύση:

- **Περιορισμοί:**

συνα, συνβ, ημα και ημβ διάφορα του μηδενός και

$$\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha\neq 0\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}\neq\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\Leftrightarrow\eta\mu\alpha\eta\mu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\neq 0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\beta\right)\neq 0$$

$$\alpha+\beta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

1ος τρόπος λυσάρι *(να τι καλό συμβαίνει όταν ταπεινά κυττάς το λυσάρι και δεν ανοίγεσαι)*

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\varepsilon\varphi\beta+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\left(\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1\right)}{\varepsilon\varphi\beta\left(\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta+1\right)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$$

2ος τρόπος

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\beta\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\alpha\left(\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\right)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta\left(\eta\mu\alpha\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\right)}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta}=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta$$

3ος τρόπος με ισοδυναμίες

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}\Leftrightarrow\left(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta\right)\varepsilon\varphi\beta=\left(\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha\right)\varepsilon\varphi\alpha\Leftrightarrow$$

$\cancel{\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}+\sigma\varphi\beta\varepsilon\varphi\beta=\cancel{\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\alpha}+\sigma\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha\Leftrightarrow\sigma\varphi\beta\varepsilon\varphi\beta=\sigma\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha\Leftrightarrow 1=1$ που ισχύει.Αρα θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

A13. Να αποδείξετε ότι:

iv) $\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

<u>1ος τρόπος</u>

$$\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\frac{1}{\eta\mu x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=$$

$$\frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

$$=\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x\right)}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1-1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=$$

$$0+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

<u>2ος τρόπος (πιο απλός!)</u>

$$\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x}\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu x}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}=\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x$$

Εφαρμογή 2η

Να αποδειχθεί ότι:

i) $\eta\mu^4\omega+\sigma\upsilon\nu^4\omega=1-2\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega$ **ii)** $\eta\mu^4\omega-\sigma\upsilon\nu^4\omega=2\eta\mu^2\omega-1$

Λύση:

Εχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^4\omega+\sigma\upsilon\nu^4\omega=\left(\eta\mu^2\omega\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)^2=\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)^2-2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega=1^2-2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega=$$
$$1-2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$\eta\mu^4\omega-\sigma\upsilon\nu^4\omega=\left(\eta\mu^2\omega\right)^2-\left(\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)^2=\left(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)\left(\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)=1\cdot\left(\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)=$$
$$\eta\mu^2\omega-\left(1-\eta\mu^2\omega\right)=\eta\mu^2\omega-\left(1-\eta\mu^2\omega\right)$$